Berechnung von Extrempunkten (Hoch- und Tiefpunkte) mit Hilfe der ersten Ableitung – 1.Möglichkeit

1. **Notwendige Bedingung**: $f'(x)=0$
   Der Graph hat an einem Extrempunkt eine waagerechte Tangente (Steigung = 0).

2. **Hinreichende Bedingung**: $f'(x)$ muss einen Vorzeichenwechsel an der Extremstelle aufweisen, d.h. die Steigung hat einen Vorzeichenwechsel.

   - **Hochpunkt**: Vorzeichenwechsel von **+** nach **-**
   - **Tiefpunkt**: Vorzeichenwechsel von **-** nach **+**

<u>Vorgehensweise:</u>

1. Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$.
2. Setzen Sie die erste Ableitung gleich Null und lösen Sie die Gleichung: $f'(x)=0$.

   (z.B. hat man eine Lösung x_1. D.h. an der Stelle x_1 kann ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt oder ein Sattelpunkt vorliegen.)
3. Untersuchen Sie die Stelle x_1:

   - Setzen Sie ein Wert links von x_1 und ein Wert rechts von x_1 in die erste Ableitung.

x	x-Wert links von x_1 d.h. kleiner als x_1	x_1	x-Wert rechts von x_1 d.h. größer als x_1
$f'(x)$		0	

   - Falls ein <u>Vorzeichenwechsel von + nach -</u> vorliegt, so hat die Funktion an der Stelle x_1 einen **Hochpunkt** (lokales Maximum)
   - Falls ein <u>Vorzeichenwechsel von - nach +</u> vorliegt, so hat die Funktion an der Stelle x_1 einen **Tiefpunkt** (lokales Minimum).
   - Falls <u>kein Vorzeichenwechsel</u> vorliegt, so hat die Funktion an der Stelle x_1 einen **Sattelpunkt** und keinen Extrempunkt (Hoch- und Tiefpunkt).

4. Setzen Sie x_1 in $f(x)$ ein, so erhalten Sie die y-Koordinate des Extrempunktes.

   - $f(x_1)=y_1 \Rightarrow TP(x_1 \mid y_1)$ oder $HP(x_1 \mid y_1)$ oder $SP(x_1 \mid y_1)$

Beachte: Wenn im zweiten Schritt mehr als eine Lösung bei der Nullsetzung der ersten Ableitung rauskommt, so untersuchen Sie jede Stelle getrennt wie im Schritt drei und vier.

Beispiel

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x + 1$$

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f.

Lösung

$$f'(x) = 0{,}75x^2 - 6x + 9$$

Bestimmung der Extrempunkte:

Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0$$

$$0{,}75x^2 - 6x + 9 = 0 \quad |:0{,}75$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

p = -8 ; q = 12

$$x_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 12}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm 2$$

$$x_1 = 4 + 2 = 6$$

$$x_2 = 4 - 2 = 2$$

Hinreichende Bedingung:

x	1	**2**	3
$f'(x)$	3,75	0	-2,25
	+		**-**

$\Rightarrow$ **HP** (an der Stelle x=2 liegt ein **Hochpunkt** vor)

$$f(2) = 0{,}25 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 1 = 9 \Rightarrow \textbf{HP(2 | 9)}$$

x	5	**6**	7
$f'(x)$	-2,25	0	3,75
	-		**+**

$f''(6) = 1{,}5 \cdot 6 - 6 = 3 > 0 \Rightarrow$ **TP** (an der Stelle x=6 liegt ein **Tiefpunkt** vor)

$$f(6) = 0{,}25 \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 + 1 = 1 \Rightarrow \textbf{TP(6 | 1)}$$