Berechnung von Extrempunkten (Hoch- und Tiefpunkte) mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung – 2.Möglichkeit

1. **Notwendige Bedingung**: $f'(x) = 0$.
   Der Graph hat an einem Extrempunkt eine waagerechte Tangente (Steigung = 0).

2. **Hinreichende Bedingung**: $f''(x) \neq 0$,
   d.h. in dem Punkt liegt eine Rechts- oder Linkskrümmung vor.

3. Berechnung der y-Koordinaten der Extrempunkte.

Vorgehensweise:

1. Lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$. (z.B. hat man zwei Lösungen x_1 und x_2.)
2. Setzen Sie die gefundenen Werte für x in die zweite Ableitung $f''(x)$ ein:

   - $f''(x_1) > 0$, d.h. an der Stelle x_1 ist der Graph linksgekrümmt
     $\Rightarrow$ **Tiefpunkt** (lokales Minimum)
   - $f''(x_2) < 0$, d.h. an der Stelle x_2 ist der Graph rechtsgekrümmt
     $\Rightarrow$ **Hochpunkt** (lokales Maximum)

3. Setzen Sie die gefundenen Werte für x in $f(x)$ ein, so erhalten Sie die y-Koordinaten der Extrempunkte.

   - $f(x_1) = y_1 \Rightarrow TP(x_1 \mid y_1)$
   - $f(x_2) = y_2 \Rightarrow HP(x_2 \mid y_2)$

4. **Sonderfall:** $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$

   Überprüfen Sie zuerst, ob es sich um eine Wendestelle mit waagerechter Tangente handelt, d.h. um einen Sattelpunkt. Falls nicht, muss $f'(x)$ einen Vorzeichenwechsel (VZW) besitzen:

   - $f'(x_0) = 0$ $\wedge$ VZW von + nach - an der Stelle x_0 $\Rightarrow$ Hochpunkt
   - $f'(x_0) = 0$ $\wedge$ VZW von - nach + an der Stelle x_0 $\Rightarrow$ Tiefpunkt
   - $f'(x_0) = 0$ $\wedge$ kein VZW an der Stelle x_0 $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Beispiel

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x + 1$$

Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f.

Lösung

$$f'(x) = 0{,}75x^2 - 6x + 9$$
$$f''(x) = 1{,}5x - 6$$

Bestimmung der Extrempunkte:

Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0$$
$$0{,}75x^2 - 6x + 9 = 0 \quad |:0{,}75$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

p = -8 ; q = 12

$$x_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 12}$$
$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$
$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{4}$$
$$x_{1/2} = 4 \pm 2$$
$$x_1 = 4 + 2 = 6$$
$$x_2 = 4 - 2 = 2$$

Hinreichende Bedingung:

$f''(6) = 1{,}5 \cdot 6 - 6 = 3 > 0 \Rightarrow$ **TP** (an der Stelle x=6 liegt ein **Tiefpunkt** vor)

$f(6) = 0{,}25 \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 + 1 = 1 \Rightarrow$ **TP(6 | 1)**

$f''(2) = 1{,}5 \cdot 2 - 6 = -3 < 0 \Rightarrow$ **HP** (an der Stelle x=2 liegt ein **Hochpunkt** vor)

$f(2) = 0{,}25 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 1 = 9 \Rightarrow$ **HP(2 | 9)**