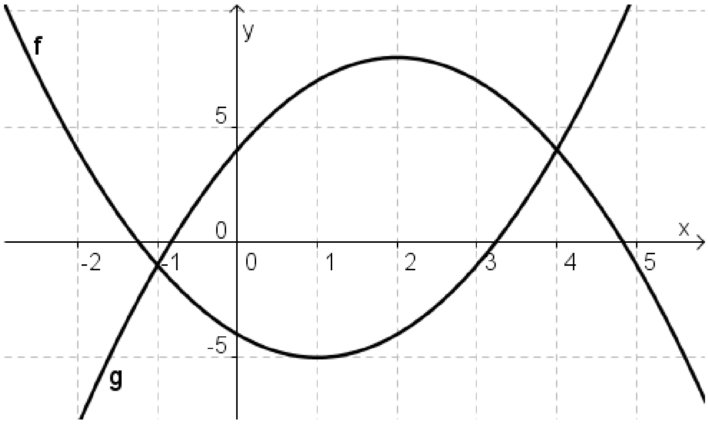
Eingeschlossene Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen

Die eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen zweier Funktionen f und g wird als Differenz der Fläche zwischen den beiden Graphen ermittelt wobei die Integrationsgrenzen die Schnittstellen der beiden Graphen sind.



Vorgehensweise:

- Schnittstellen der beiden Funktion berechnen
- Funktionendifferenz zwischen den Schnittstellen integrieren

1. Beispiel:

Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 - 2x - 4 \text{ und } g(x) = -x^2 + 4x + 4$$

- Schnittstellen bestimmen

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 2x - 4 = -x^2 + 4x + 4$$
$$2x^2 - 6x - 8 = 0$$
$$\dots$$

  - Die Graphen schneiden sich an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.
- Es muss also in den Intervallen -1 bis 4 integriert werden.

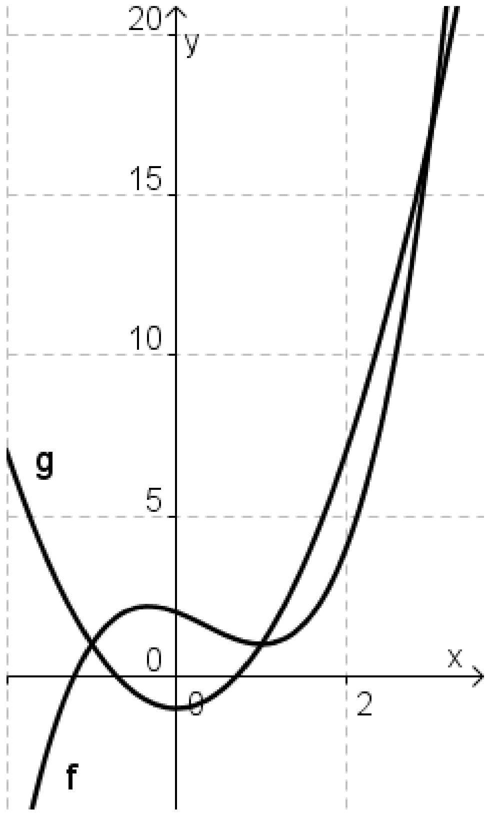
  - $$\int_{-1}^{4} f(x) - g(x)\ dx = \int_{-1}^{4} (x^2 - 2x - 4) - (-x^2 + 4x + 4)\ dx$$
    $$= \int_{-1}^{4} 2x^2 - 6x - 8\ dx$$
    $$= \left[\tfrac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 8x\right]_{-1}^{4}$$
    $$= (\tfrac{2}{3}4^3 - 3\cdot 4^2 - 8\cdot 4) - (\tfrac{2}{3}(-1)^3 - 3(-1)^2 - 8\cdot(-1))$$
    $$= \tfrac{125}{3}$$

- Fläche: $A = \frac{125}{3}$ FE

2. Beispiel:

Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2 \text{ und } g(x) = 2x^2 - 1$$



- Schnittstellen bestimmen

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - x^2 - x + 2 = 2x^2 - 1$$
$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$
$$\ldots$$

  - Die Graphen schneiden sich an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.

- Es muss also in den Intervallen von -1 bis 1 und von 1 bis 3 integriert werden.

  - $$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\ dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 2) - (2x^2 - 1)\ dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^3 - 3x^2 - x + 3\ dx \\ &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{1} \\ &= (\tfrac{1}{4}1^4 - 1^3 - \tfrac{1}{2}1^2 + 3\cdot 1) - (\tfrac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^3 - \tfrac{1}{2}(-1)^2 + 3\cdot(-1)) \\ &= 4\end{aligned}$$

  - $$\begin{aligned}&\int_{1}^{3} f(x) - g(x)\ dx = \int_{1}^{3} (x^3 - x^2 - x + 2) - (2x^2 - 1)\ dx \\ &= \int_{1}^{3} x^3 - 3x^2 - x + 3\ dx \\ &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{3} \\ &= (\tfrac{1}{4}3^4 - 3^3 - \tfrac{1}{2}3^2 + 3\cdot 3) - (\tfrac{1}{4}1^4 - 1^3 - \tfrac{1}{2}1^2 + 3\cdot 1) \\ &= -4\end{aligned}$$

  - Fläche: A = 4 + 4 = 8 FE