Bestimmung der Funktionsgleichung

Wie kann man die Funktionsgleichung einer Geraden aus unterschiedlichen Bedingungen berechnen? Das Fundament für alle folgenden Berechnungen ist die Ihnen bekannte Gleichung einer linearen Funktion:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

1. Fall

Steigung m und ein Punkt sind bekannt.

Vorgehensweise an einem Beispiel:
Der Graph einer linearen Funktion hat die Steigung $m = 0{,}5$ und verläuft durch den Punkt P(-3 | 2). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Ausgangsgleichung:	$f(x) = m \cdot x + b$
Steigung $m = 0{,}5$ einsetzen:	$f(x) = 0{,}5 \cdot x + b$
Punkt P(-3 | 2) liegt auf der Geraden, also gilt: $y = f(x) = 2$ und $x = -3$:	$2 = 0{,}5 \cdot (-3) + b$
nach b auflösen:	$2 = -1{,}5 + b \quad \vert \quad +1{,}5$ $3{,}5 = b$
Lösung: $f(x) = 0{,}5x + 3{,}5$	
Kontrolle der Lösung durch die *Punktprobe*, d.h. die Lösungskontrolle erfolgt durch Einsetzen des Punktes, hier P(-3 | 2):	$f(-3) = 0{,}5 \cdot (-3) + 3{,}5$ $= -1{,}5 + 3{,}5 = 2$ => Lösung richtig

Aufgabe: Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden mit der Steigung m und dem Punkt P.

a) m = 3 ; P(4 | -8)
b) m = -5 ; P(-1 | 7)
c) m = 2,5 ; P(-4 | -14)

2. Fall

y-Achsenabschnitt b und ein Punkt sind bekannt.

Vorgehensweise an einem Beispiel:
Der Graph einer linearen Funktion hat den y-Achsenabschnitt $b = 2$ und verläuft durch den Punkt P(-4 | 14). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Ausgangsgleichung:	$f(x) = m \cdot x + b$
y-Achsenabschnitt $b = 2$ einsetzen:	$f(x) = m \cdot x + 2$
Punkt P(-4 | 14) liegt auf der Geraden, also gilt: $y = f(x) = 14$ und $x = -4$:	$14 = m \cdot (-4) + 2$
nach m auflösen:	$14 = -4m + 2 \quad \mid \ -2$ $12 = -4m \quad \mid \ :(-4)$ $-3 = m$
Lösung: $f(x) = -3x + 2$	
Kontrolle der Lösung erfolgt durch Einsetzen des Punktes, hier P(-4 | 14):	$f(-4) = (-3) \cdot (-4) + 2$ $= 12 + 2 = 14$ => Lösung richtig

Aufgabe: Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden mit dem y-Achsenabschnitt b und dem Punkt P.

a) b = 4 ; P(-2 | 18)
b) b = -3 ; P(3 | 9)
c) b = 3,5 ; P(2 | 13,5)

3. Fall

Zwei Punkte sind bekannt.

Vorgehensweise an einem Beispiel:

Der Graph einer linearen Funktion verläuft durch die Punkte $P_1(2 \mid -4)$ und $P_2(4 \mid 6)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

1. Schritt: Steigung m berechnen

Steigungsformel:	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Koordinaten der beiden Punkte $P_1(2 \mid -4)$ und $P_2(4 \mid 6)$ einsetzen und Steigung m berechnen:	$m = \dfrac{6-(-4)}{4-2} = \dfrac{10}{2} = 5$

2. Schritt: wie im 1. Fall b berechnen

Ausgangsgleichung:	$f(x) = m \cdot x + b$
Steigung $m = 5$ einsetzen:	$f(x) = 5 \cdot x + b$
Da beide Punkte auf der Geraden liegen, spielt es keine Rolle welchen Punkt man für die Berechnung von b nimmt. Hier nehmen wir den Punkt $P_1(2 \mid -4)$, also gilt: $y = f(x) = -4$ und $x = 2$:	$-4 = 5 \cdot 2 + b$
nach b auflösen:	$-4 = 10 + b \quad \mid \; -10$ $-14 = b$

Lösung: $f(x) = 5x - 14$

Kontrolle der Lösung erfolgt durch Einsetzen der beiden Punkte, hier $P_1(2 \mid -4)$ und $P_2(4 \mid 6)$:	$P_1(2 \mid -4)$: $f(2) = 2 \cdot 5 - 14$ $= 10 - 14 = -4$ $P_2(4 \mid 6)$: $f(4) = 4 \cdot 5 - 14$ $= 20 - 14 = 6$ => Lösung richtig

Wichtig bei der Kontrolle: Beide Punkte müssen eingesetzt werden!

Aufgabe: Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden, die durch zwei Punkte verlaufen.

a) $P(2 \mid 7)$; $Q(5 \mid 16)$
b) $P_1(-2 \mid -14)$; $P_2(4 \mid 16)$
c) $A(3 \mid 1)$; $B(-5 \mid 15)$