Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen

$$\underbrace{ax^2}_{\substack{\text{Quadratisches} \\ \text{Glied}}} + \underbrace{bx}_{\substack{\text{Lineares} \\ \text{Glied}}} + \underbrace{c}_{\substack{\text{Absolutes} \\ \text{Glied}}} = 0$$

1. Fall

Quadratische Gleichung in der Allgemeinen Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Lösungsmethode:

- Durch a teilen
- und dann die pq-Formel anwenden.

Beispiel:

$$0{,}5x^2 + 6x - 18 = 0 \quad |: 0{,}5$$

$$x^2 + 12x - 36 = 0$$

Normalform der quadratischen Gleichung

p = 12; q = -36

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 36}$$

Anwendung der pq-Formel

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{36 + 36}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{72}$$

Diskriminante D=72 >0
→ zwei Lösungen

$$x_{1/2} = -6 \pm 8{,}49$$

$$x_1 = -6 + 8{,}49 = \underline{\underline{2{,}49}}$$

$$x_2 = -6 - 8{,}49 = \underline{\underline{-14{,}49}}$$

2. Fall **Quadratische Gleichung in der Allgemeinen Form ohne absolutes Glied (c):**

$$ax^2 + bx = 0$$

1. Lösungsmethode (umständlich):

- Durch a teilen
- und dann die pq-Formel anwenden.

2. Lösungsmethode:

- x ausklammern
- Die 1. Lösung ist Null.
- Die 2. Lösung erhält man durch Nullsetzen der Klammer.

Beispiel (1. Lösungsmethode):

$$4x^2 + 9x = 0 \quad |:4$$

$$x^2 + 2{,}25x = 0$$

Normalform der quadratischen Gleichung

p = 2,25; q = 0

$$x_{1/2} = -\frac{2{,}25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2{,}25}{2}\right)^2 - 0}$$

Anwendung der pq-Formel

$$x_{1/2} = -\frac{2{,}25}{2} \pm \sqrt{1{,}265625}$$

Diskriminante D=1.265625 >0
→ zwei Lösungen

$$x_{1/2} = -1{,}125 \pm 1{,}125$$

$$x_1 = -1{,}125 + 1{,}125 = \underline{\underline{0}}$$

$$x_2 = -1{,}125 - 1{,}125 = \underline{\underline{-2{,}25}}$$

Beispiel (2. Lösungsmethode):

$$4x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (4x + 9) = 0$$

x -Ausklammern

$\underline{\underline{x = 0}}$ oder $4x + 9 = 0 \quad |-9$

Zwei Lösungen

$$4x = -9 \quad |:4$$

$$\underline{\underline{x = -2{,}25}}$$

3. Fall **Quadratische Gleichung in der Allgemeinen Form ohne lineares Glied (bx):**

$$ax^2 + c = 0$$

<u>1. Lösungsmethode (umständlich):</u>
- Durch a teilen
- und dann die pq-Formel anwenden

<u>2. Lösungsmethode:</u>
- c auf die andere Seite bringen
- Gleichung durch a teilen
- Wurzel ziehen
  - <u>1. Fall:</u> Die Zahl auf der rechten Seite negativ: **<u>keine</u>** Lösung
  - <u>2. Fall:</u> Die Zahl auf der rechten Seite gleich Null: **<u>eine</u>** Lösung
  - <u>3. Fall:</u> Die Zahl auf der rechten Seite positiv: **<u>zwei</u>** Lösungen

▪

3. Fall (Fortsetzung)

Beispiel (1. Lösungsmethode):

$$3x^2 - 21 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 - 7 = 0$$

Normalform der quadratischen Gleichung

p = 0; q = -7

$$x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + 7}$$

Anwendung der pq-Formel

$$x_{1/2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{7}$$

Diskriminante D=7 >0
→ zwei Lösungen

$$x_{1/2} = 0 \pm 2{,}65$$

$$x_1 = 0 + 2{,}65 = \underline{\underline{2{,}65}}$$

$$x_2 = 0 - 2{,}65 = \underline{\underline{-2{,}65}}$$

Beispiel (2. Lösungsmethode):

$$3x^2 - 21 = 0 \quad |+21$$

$$3x^2 = 21 \quad |:3$$

$$x^2 = 7 \quad |\sqrt{\ }$$

$$x \approx \pm 2{,}65$$

$$x_1 = \underline{\underline{2{,}65}}$$

$$x_2 = \underline{\underline{-2{,}65}}$$

4. Fall **Quadratische Gleichung in der Scheitelpunktsform:**

$$a(x-x_s)^2+y_s=0$$

<u>1. Lösungsmethode (umständlich):</u>

- Durch a teilen
- Klammern auflösen
- und dann die pq-Formel anwenden.

<u>2. Lösungsmethode:</u>

- y_S auf die andere Seite bringen
- Gleichung durch a teilen
- Wurzel ziehen
  - <u>1. Fall:</u> Die Zahl auf der rechten Seite negativ: **<u>keine</u>** Lösung
  - <u>2. Fall:</u> Die Zahl auf der rechten Seite gleich Null: **<u>eine</u>** Lösung
  - <u>3. Fall:</u> Die Zahl auf der rechten Seite positiv: **<u>zwei</u>** Lösungen
- nach x auflösen.

4. Fall **<u>Beispiel (1. Lösungsmethode):</u>**

(Fortsetzung)

$$4(x-1)^2-20=0 \quad |:4$$

$$(x-1)^2-5=0$$

$$x^2-2x+1-5=0$$

$$x^2-2x-4=0$$

Normalform der quadratischen Gleichung

p = -2; q = -4

$$x_{1/2}=-\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+4}$$

Anwendung der pq-Formel

$$x_{1/2}=1\pm\sqrt{5}$$

Diskriminante D=5 >0
→ zwei Lösungen

$$x_{1/2}=1\pm 2{,}24$$

$$x_1=1+2{,}24=\underline{\underline{3{,}24}}$$

$$x_2=1-2{,}24=\underline{\underline{-1{,}24}}$$

4. Fall **Beispiel (2. Lösungsmethode):**

(Fortsetzung)

$$4(x-1)^2 - 20 = 0 \quad |+20$$

$$4 \cdot (x-1)^2 = 20 \quad |:4$$

$$(x-1)^2 = 5 \quad |\sqrt{}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{5}$$

$$x - 1 = \pm 2.24 \quad |+1$$

$$x = 1 \pm 2,24$$

$$x_1 = 1 + 2,24 = \underline{\underline{3,24}}$$

$$x_2 = 1 - 2,24 = \underline{\underline{-1,24}}$$