Nullstellenbestimmung bei ganzrationalen Funktionen der Form f(x) = ax^{2n} + bx^{n} + c durch Substitution

$$f(x) = ax^{2n} + bx^{n} + c$$

<u>Vorgehensweise:</u>

- Funktion gleich Null setzen: $ax^{2n} + bx^{n} + c = 0$
- Substitution: $z = x^{n}$ liefert eine quadratische Gleichung: $az^{2} + bz + c = 0$
- Durch den Faktor vor dem z^{2} teilen (also durch a).
- Quadratische Gleichung lösen, z.B. mit Hilfe der pq-Formel.
- Substitution rückgängig machen (**Resubstituierung**), durch Wurzel ziehen.
- **<u>Beachte</u>**:
  - **Ungerade Wurzel** kann man aus jeder reellen Zahl ziehen auch von einer negativen Zahl und es gibt <u>immer genau eine</u> Lösung.
  - **Gerade Wurzel** kann man nur von reellen Zahlen, die größer oder gleich Null sind, ziehen. Es gibt
    - keine Lösung bei negativen Zahlen,
    - eine Lösung bei Null,
    - zwei Lösungen bei positiven Zahlen.

<u>1. Beispiel:</u> $f(x) = 2x^{4} - 12x^{2} + 16$

$$f(x) = 0$$
$$2x^{4} - 12x^{2} + 16 = 0$$

Substitution: $z = x^{2}$

$$2z^{2} - 12z + 16 = 0 \qquad |:2$$
$$z^{2} - 6z + 8 = 0$$
$$p = -6 \qquad q = 8$$
$$z_{1/2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^{2} - 8}$$
$$z_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$
$$z_{1/2} = 3 \pm \sqrt{1}$$
$$z_{1/2} = 3 \pm 1$$
$$z_{1} = 3 + 1 = 4$$
$$z_{2} = 3 - 1 = 2$$

Substitution rückgängig machen (**Resubstitution**):

$z_1 = 4$	$z_2 = 2$
$x^2 = 4 \quad \vert\sqrt{}$	$x^2 = 2 \quad \vert\sqrt{}$
$\underline{\underline{x = \pm 2}}$	$x = \pm\sqrt{2}$
	$\underline{\underline{x \approx \pm 1{,}41}}$

Die Funktion $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 16$ hat vier Nullstellen **N_1(-2 | 0)**, **N_2(2 | 0)**, **N_3(-1,41 | 0)** und **N_4(1,41 | 0)**.

<u>2. Beispiel:</u> $g(x) = -0{,}5x^4 + 1{,}5x^2 + 14$

$$g(x) = 0$$
$$-0{,}5x^4 + 1{,}5x^2 + 14 = 0$$

Substitution: $z = x^2$

$$-0{,}5z^2 + 1{,}5z + 14 = 0 \qquad \vert : (-0{,}5)$$
$$z^2 - 3z - 28 = 0$$
$$p = -3 \qquad q = -28$$
$$z_{1/2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 28}$$
$$z_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{30{,}25}$$
$$z_{1/2} = 1{,}5 \pm 5{,}5$$
$$z_1 = 1{,}5 + 5{,}5 = 7$$
$$z_2 = 1{,}5 - 5{,}5 = -4$$

Substitution rückgängig machen (**Resubstitution**):

$z_1 = 7$	$z_2 = -4$
$x^2 = 7 \quad \vert\sqrt{}$	$x^2 = -4 \quad \vert\sqrt{}$
$x = \pm\sqrt{7}$	liefert keine Lösung
$\underline{\underline{x \approx \pm 2{,}65}}$	

Die Funktion $g(x) = -0{,}5x^4 + 1{,}5x^2 + 14$ hat zwei Nullstellen **N_1(-2,65 | 0)** und **N_2(2,65 | 0).**

3. Beispiel: $h(x) = -3x^6 + 9x^3 + 30$

$$h(x) = 0$$
$$-3x^6 + 9x^3 + 30 = 0$$

Substitution: $z = x^3$

$$-3z^2 + 9z + 30 = 0 \quad |:(-3)$$
$$z^2 - 3z - 10 = 0$$
$$p = -3 \qquad q = -10$$
$$z_{1/2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 10}$$
$$z_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{12{,}25}$$
$$z_{1/2} = 1{,}5 \pm 3{,}5$$
$$z_1 = 1{,}5 + 3{,}5 = 5$$
$$z_2 = 1{,}5 - 3{,}5 = -2$$

Substitution rückgängig machen (**Resubstitution**):

$z_1 = 5$	$z_2 = -2$
$x^3 = 5 \quad \vert \sqrt[3]{}$	$x^3 = -2 \quad \vert \sqrt[3]{}$
$x = \sqrt[3]{5}$	$x = \sqrt[3]{-2}$
$\underline{\underline{x \approx 1{,}71}}$	$\underline{\underline{x \approx -1{,}26}}$

Die Funktion $h(x) = -3x^6 + 9x^3 + 30$ hat zwei Nullstellen **N_1(1,71 | 0)** und **N_2(-1,26 | 0)**.

4. Beispiel: $i(x) = 5x^8 - 5x^4 - 60$

$$i(x) = 0$$
$$5x^8 - 5x^4 - 60 = 0$$

Substitution: $z = x^4$

$$5z^2 - 5z - 60 = 0 \quad |:5$$
$$z^2 - z - 12 = 0$$
$$p = -1 \qquad q = -12$$
$$z_{1/2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12}$$
$$z_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{12{,}25}$$
$$z_{1/2} = 0{,}5 \pm 3{,}5$$
$$z_1 = 0{,}5 + 3{,}5 = 4$$
$$z_2 = 0{,}5 - 3{,}5 = -3$$

Substitution rückgängig machen (**Resubstitution**):

$z_1 = 4$	$z_2 = -3$
$x^4 = 4 \quad \vert \sqrt[4]{}$	$x^4 = -3 \quad \vert \sqrt[4]{}$
$\underline{\underline{x = \pm\sqrt[4]{4} \approx \pm 1{,}41}}$	liefert keine Lösung

Die Funktion $i(x) = 5x^8 - 5x^4 - 60$ hat zwei Nullstellen **N₁(-1,41 | 0)** und **N₂(1,41 | 0)**.