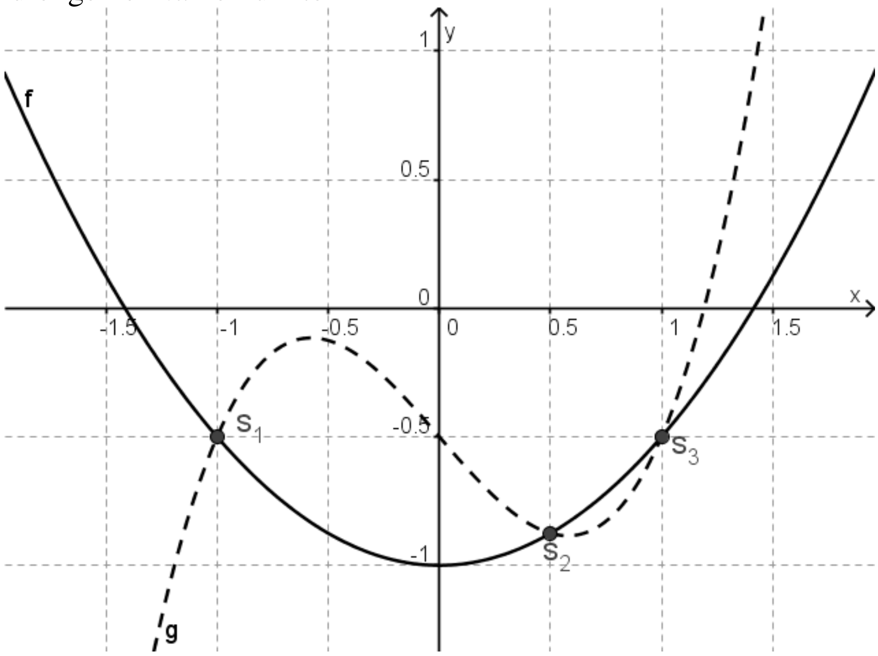
Schnittpunkte von Graphen

Definition: Die Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen sind die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen (siehe Abbildung unten).

Das Berechnen von Schnittpunkten der Graphen zweier Funktionen f und g lässt sich auf das Bestimmen von Nullstellen einer Funktion zurückführen.

Beispiel:

Die untere Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und g mit $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ und $g(x) = x^3 - x - 0{,}5$. Die beiden Graphen haben drei Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3,d.h. haben drei gemeinsame Punkte.



Die Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g werden durch die Gleichung $f(x) = g(x)$ bestimmt.

__**Vorgehensweise:**__

- Beide Funktionen gleich setzen, d.h. $f(x) = g(x)$
- $g(x)$ auf die andere Seite bringen, d.h. $f(x) - g(x) = 0$
- Mit einem bekannten Verfahren die Gleichung lösen. (siehe Verfahren zur Nullstellenberechnung)
- Die y-Werte der Schnittpunkte durch Einsetzen der x-Werte in die Funktion f oder in die Funktion g berechnen.

Beachte:

- Um zu kontrollieren, ob man richtig gerechnet hat, setzt man die x-Werte in die beiden Funktionen. Wenn man bei jedem x-Wert bei beiden Funktionen denselben y-Wert erhält, so wurde die Aufgabe richtig gelöst.
- Wenn man bei der Bestimmung der x-Werte gerundet hat, so kann es zu einer Abweichung zwischen den y-Werten beim Einsetzen in die beiden Funktionen kommen.

Beispiel: Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von

$f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ und $g(x) = x^3 - x - 0{,}5$.

Beide Funktionen gleich setzen:

$$f(x) = g(x)$$

$$0{,}5x^2 - 1 = x^3 - x - 0{,}5 \qquad | -x^3 + x + 0{,}5$$

$$-x^3 + 0{,}5x^2 + x - 0{,}5 = 0 \qquad | \cdot 2$$

$$-2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$$

Lösung erraten: x = 1

Polynomdivision:

$$(-2x^3 + x^2 + 2x - 1) : (x - 1) = -2x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{l} -\ \underline{(-2x^3 + 2x^2)} \\ \qquad -x^2 + 2x \\ \quad -\ \underline{(-x^2 + x)} \\ \qquad\qquad x - 1 \\ \qquad -\ \underline{(x - 1)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$-2x^2 - x + 1 = 0 \qquad | : (-2)$$

$$x^2 + 0{,}5x - 0{,}5 = 0$$

p = 0,5 ; q = -0,5

$$x_{1/2} = -\frac{0{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 + 0{,}5}$$

Anwendung der pq-Formel:

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$x_{1/2} = -0{,}25 \pm \sqrt{0{,}5625}$$

Diskriminante D = 0,5625 >0 → zwei Lösungen

$$x_{1/2} = -0{,}25 \pm 0{,}75$$

$$x_1 = -0{,}25 + 0{,}75 = 0{,}5$$

$$x_2 = -0{,}25 - 0{,}75 = -1$$

y-Werte der Schnittpunkte berechnen durch Einsetzen in die Funktion f oder g :

$f(1) = 0{,}5 \cdot 1^2 - 1 = -0{,}5$ $\qquad$ S_1(1 | -0,5).

$f(0{,}5) = 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 - 1 = -0{,}875$ $\qquad$ S_2(0,5 | -0.875)

$f(-1) = 0{,}5 \cdot (-1)^2 - 1 = -0{,}5$ $\qquad$ S_3(-1 | -0,5)

Die beiden Graphen haben drei Schnittpunkte S_1(-1 | -0,5), S_2(0,5 | -0.875) und S_3(1 | -0,5).